Αναπλήρωση.

Σάββατο 16-1, ώρα 11-2

16-12-15

Ενέργεια στο χαρακτηριστικό τρίγωνο (Δ)

$$E_\Delta(t) = \frac{1}{2}\int_{x^*-c(t^*-t)}^{x^*+c(t^*-t)} \left(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)\right) dx, \quad t\in[0,t^*]$$

Ισχυρισμός: $E_\Delta : [0,t^*] \to \mathbb{R}$ φθίνουσα (Ασκ. 2.23)

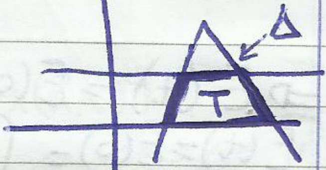
Εδώ: $E_\Delta(t) \le E_\Delta(0), \ \forall t \in (0,t^*)$

Απόδειξη

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \Longrightarrow \underbrace{2u_{tt}u_t}_{=(u_t)^2_t} = \underbrace{c^2\, 2u_{xx}u_t}_{=-(u_x^2)_t + 2(u_x u_t)_x}$$

$$\Rightarrow 2c^2(u_x u_t)_x - (u_t^2 + c^2 u_x^2)_t = 0$$

$$\Rightarrow \int_T 2c^2(u_x u_t)_x - (u_t^2 + c^2 u_x^2)_t \, d(x,t) = 0$$



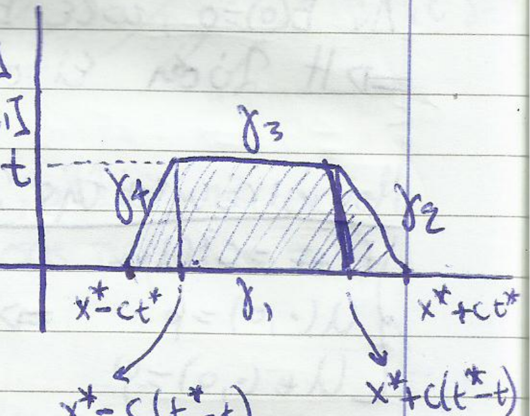
$$\overset{\text{Green}}{\Longleftrightarrow} \int_{\partial T} (u_t^2 + c^2 u_x^2,\ 2c^2 u_x u_t)\cdot d(x,t) = 0 =: I$$

$\gamma_1(s) = (x^*-ct^*, 0) + s(2ct^*, 0), \ s\in[0,1]$

$\gamma_3(s) = (x^*+c(t^*-t), t) + s(-2c(t^*-t), 0), \ s\in[0,1]$

$\gamma_2(s) = (x^*+ct^*, 0) + s(-ct, t), \ s\in[0,1]$

$\gamma_4(s) = (x^*-c(t^*-t), t) + s(-ct, -t), \ s\in[0,1]$



$$I = \int_0^1 (u_t^2 + c^2u_x^2)(\gamma_1(s))\, 2ct^*\, ds \left(= \int_{x^*-ct^*}^{x^*+ct^*} (u_t^2+c^2u_x^2)(x,0)\,dx = 2E_\Delta(0)\right)$$

$$+ \int_0^1 (u_t^2 + c^2u_x^2)(\gamma_2(s))\,(-2c(t^*-t))\,ds \left(= \int_{x^*-c(t^*-t)}^{x^*+c(t^*-t)} (u_t^2+c^2u_x^2)(x,t)\,dx\right) = -2E_\Delta(t)$$

$$+ \int_0^1 (u_t^2 + c^2u_x^2)(\gamma_2(s))(-ct) + 2c^2 u_x u_t(\gamma_2(s))\, t\, ds \ +$$

$$+\int_0^1 (u_t^2+c^2u_x^2)(\gamma_4(s))(-ct)+2c^2u_xu_t(\gamma_4(s))(-t)\,ds=0$$

$$\Leftrightarrow 2(E_\Delta(t)-E_\Delta(0))=-ct\Big[\int_0^1 \underbrace{(u_t^2+c^2u_x^2-2cu_xu_t)}_{=(u_t-cu_x)^2}(\gamma_2(s))\,ds$$

$$+\int_0^1 \underbrace{(u_t^2+c^2u_x^2+2cu_xu_t)}_{=(u_t+cu_x)^2}(\gamma_4(s))\,ds\Big]\leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2E_\Delta(t)\leq 2E_\Delta(0)\Leftrightarrow \boxed{E_\Delta(t)\leq E_\Delta(0)}$$

[Μη ομογενής $1^{ης}$ τάξης: $\begin{cases} u_t+cu_x=f(x,t), c\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=\varphi(x) \end{cases}$

Για $f\equiv 0$: $u(x,t)=\varphi(x-ct)$

Μη ομογενή: $c=0\rightarrow$ $u_t=f(x,t)\Rightarrow u(x,t)-u(x,0)=\int_0^t f(x,s)\,ds$

$$\Rightarrow u(x,t)=\varphi(x)+\int_0^t f(x,s)\,ds$$

$c\neq 0\rightarrow$ Είδαμε ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες της ομογενούς εξίσωσης: $V_t+cV_x=0$

είναι $x=y+c(t-s)$ (οι οποίες περνάνε απ' το σημείο $(y,s)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$)

$g(\tau):=u(\underbrace{y+c\tau}_{x(\tau)},\underbrace{s+\tau}_{y(\tau)})\;(:=z(\tau))\Rightarrow$

$g'(\tau)=cu_x(y+c\tau,s+\tau)+u_t(y+c\tau,s+\tau)=f(y+c\tau,s+\tau)$

και $g(0)=u(y,s)$

$g(-s)=u(y-cs,0)$

$g(0)-g(-s)=u(y,s)-u(y-cs,0)=u(y,s)-\varphi(y-cs)=$

Θεμελιώδης Θεώρημα $\int_{-s}^0 f(y+c\tau,s+\tau)\,d\tau \overset{\sigma=\tau+s}{=} \int_0^s f(y+c(\sigma-s),\sigma)\,d\sigma$

Άρα, $\boxed{u(x,t)=\varphi(x-ct)+\int_0^t f(x-c(t-\sigma),\sigma)\,d\sigma}$]

Μη ομογενής κυματική εξίσωση στην ευθεία

3 $\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + f & \text{στο } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ w(\cdot,0)=\varphi, & w_t(\cdot,0)=\psi \end{cases}$

f λέγεται όρος εξαναγκασμού

Παρατήρηση

1) Η λύση της 3 είναι μοναδική

[w_1, w_2 λύσεις της 3 $\Rightarrow w_1 - w_2$ της 2: $\begin{cases} u_{tt}=c^2 u_{xx} \\ u(\cdot,0)=0, \ u_t(\cdot,0)=0 \end{cases}$

$\left[E(0)=0=E(t), \forall t\right]$

Θεώρημα: Αν το 3 έχει λύση τότε αυτή θα είναι, $w(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\tau)d\tau + \frac{1}{2c}\int_\Delta f$,

όπου $\int_\Delta f = \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,d\tau$

Παρατήρηση: Έστω v λύση του 2 (ομογενές ΠΑΤ) και u λύση του 3 με $\varphi\equiv 0$, $\psi\equiv 0$, δηλαδή u λύση του 4: $\begin{cases} u_{tt}=c^2 u_{xx}+f \\ u(\cdot,0)=0 \\ u_t(\cdot,0)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow u+v=w$ λύση του 3 με $w(\cdot,0)=\varphi$, $w_t(\cdot,0)=\psi$

Άρα, το Θεώρημα γράφεται ισοδύναμα: Αν u λύση του 4, **τότε** $u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_\Delta f(y,\tau)\,d(y,\tau)$

Παρατήρηση: Αυτή είναι και μια ειδική λύση της ~~μη~~ ομογενούς κυματικής εξίσωσης (όχι του ΠΑΤ) και η γενική λύση της μη ομογενούς είναι τότε

$$u(x,t) = g(x-ct) + h(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{\Delta} f(y,\tau)\, d(y,\tau)$$

Απόδειξη

1ος τρόπος (διάσπαση διαφορικού τελεστή σε γινόμενο)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f \iff (\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2)u = f \iff (\partial_t - c\partial_x)\underbrace{(\partial_t + c\partial_x)u}_{=:v} = f$$

με $v(x,0) = u_t(x,0) + c u_x(x,0) = 0$

λύση της μη ομογ. $(\partial_t - c\partial_x)v = f$ $\Longrightarrow$ $v(x,\tau) = \int_0^{\tau} f(x + c(\tau-\sigma), \sigma)\, d\sigma$, $x \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$

και άρα ④ $\iff \begin{cases} (\partial_\tau - c\partial_x)u = v \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$

$$\Longrightarrow u(x,t) = \int_0^t v(x - c(t-\tau), \tau)\, d\tau = \int_0^t \int_0^{\tau} f(x - c(t-\tau) + c(\tau-\sigma), \sigma)\, d\sigma\, d\tau$$

$$\| \quad J$$

Ισχυρισμός: $J = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,s)\, ds$

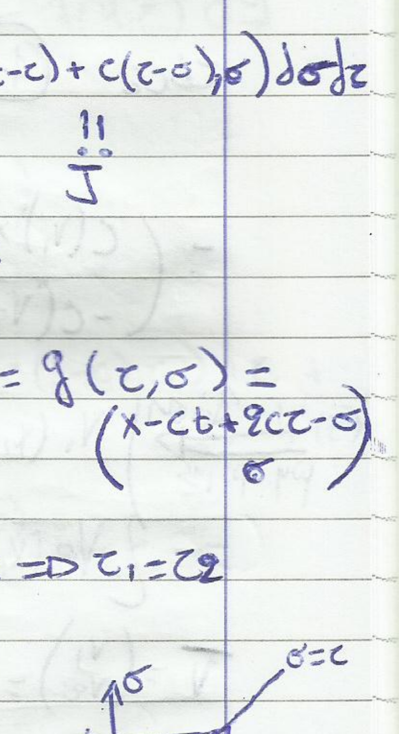
Απόδειξη (ισχυρισμού)

Αλλαγή μεταβλητής $(\tau,\sigma) \longmapsto (y,s) = g(\tau,\sigma) = \begin{pmatrix} x - ct + 2c\tau - \sigma \\ \sigma \end{pmatrix}$

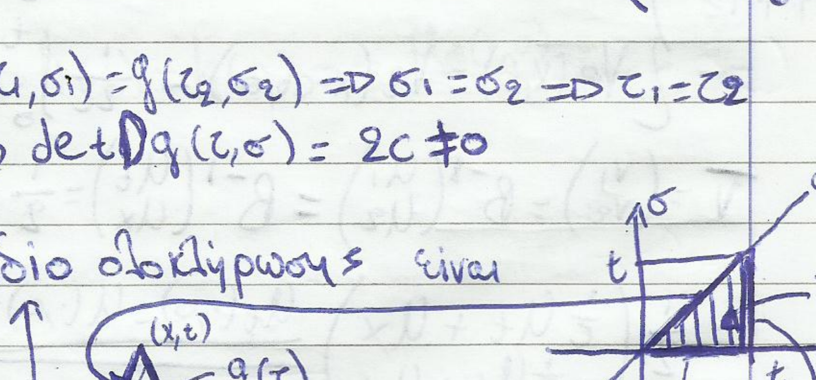
[$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, '1-1': $(g(\tau_1,\sigma_1) = g(\tau_2,\sigma_2) \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \tau_1 = \tau_2)$

$Dg(\tau,\sigma) = \begin{pmatrix} 2c & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det Dg(\tau,\sigma) = 2c \neq 0$

Επίσης, στο J το πεδίο ολοκλήρωσης είναι



και το $g(T)$ είναι



$T: (0,0) \xmapsto{g} (x-ct, 0)$

$$\text{KAM}: \int_{\Delta=g(T)} f(y,s)\, d(y,s) = \int_T f(g(\tau,\sigma))\, \underbrace{|\det Dg(\tau,\sigma)|}_{=2c}\, d\tau\, d\sigma = 2cJ$$

$$\Longrightarrow J = \frac{1}{2c}\int_\Delta f(y,s)\, d(y,s)$$

<u>2ος τρόπος</u>

Αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα u λύση, είναι να έχει τη μορφή, $u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\, dy\, d\tau$.

$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix}$. Τότε (4) $\Leftrightarrow \bar{u}_t = A\bar{u}_x + \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & c^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (4')

$\bar{u} := B\bar{v}$, $B = \begin{pmatrix} c & -c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

τότε (4') $\Leftrightarrow B\bar{v}_t - AB\bar{v}_x + \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \bar{v}_t = \underbrace{B^{-1}AB}_{=\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}}\bar{v}_x + \underbrace{B^{-1}}_{=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/c & 1 \\ -1/c & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} c(v_1)_x \\ -c(v_2)_x \end{pmatrix} + \frac{1}{2c}\begin{pmatrix} f \\ -f \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (v_1)_t - c(v_1)_x = \frac{1}{2c} f \\ (v_2)_t + c(v_2)_x = -\frac{1}{2c} f \end{cases}$$

$$\xRightarrow[\text{μη.ομ. 1ης}]{\text{λύση}} \begin{cases} v_1(x,t) = v_1(x+ct,0) + \frac{1}{2c}\int_0^t f(x+c(t-\tau),\tau)\, d\tau \\ v_2(x,t) = v_2(x-ct,0) - \frac{1}{2c}\int_0^t f(x-c(t-\tau),\tau)\, d\tau \end{cases}$$

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/c & 1 \\ -1/c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{c}u_t + u_x \\ -\frac{1}{c}u_t + u_x \end{pmatrix} \xrightarrow{u_t(\cdot,0) = u(\cdot,0) = 0} \bar{v}(\cdot,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v_1(x,t) \\ v_2(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c}\int_0^t f(x+c(t-\tau),\tau)\, d\tau \\ -\frac{1}{2c}\int_0^t f(x-c(t-\tau),\tau)\, d\tau \end{pmatrix}$$

$$\overline{u}=B\overline{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cV_1 - cV_2 \\ V_1 + V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2c}\begin{pmatrix} c\int_0^t f(x+c(t-\tau),\tau) + f(x-c(t-\tau),\tau)\,d\tau \\ \int_0^t \left(f(x+c(t-\tau),\tau) - f(x-c(t-\tau),\tau)\right) d\tau \end{pmatrix}$$

Ολοκληρώνουμε την εξίσωση για u_x $\left[\int_0^x f'(y)\,dy = f(x) - f(0)\right]$

$$u(x,t) - u(0,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \underbrace{\int_0^x f(y+c(t-\tau),\tau) - f(y-c(t-\tau),\tau)\,dy}\,d\tau$$

$$= \int_{c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y',\tau)\,dy' - \int_{-c(t-\tau)}^{x-c(t-\tau)} f(y',\tau)\,dy'$$

$$= \int_{c(\dots)}^{x+c(\dots)} f(\dots)\,dy' + \int_{x-c(\dots)}^{-c(\dots)} f(\dots)\,dy$$

$$= \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy - \int_{-c(t-\tau)}^{c(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,d\tau + h(t)$$

$$\Rightarrow u_t(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t f(x+c(t-\tau),\tau) + f(x-c(t-\tau),\tau)\,d\tau + h'(t)$$

$$\xrightarrow{\text{1η εξίσωση}} h'(t) = 0 \Rightarrow h(t) = h(0) = c \xrightarrow{u(\cdot,0)=0} c = 0$$